
Analisis Data Geofisika: Memahami Teori Inversi

Dr. Eng. Supriyanto, M.Sc

Edisi I

**Departemen Fisika-FMIPA
Univeristas Indonesia
2007**

Untuk Muflih Syamil dan Hasan Azmi.....

Kata Pengantar

Buku ini semula merupakan diktat perkuliahan mata kuliah Analisis Data Geofisika yang diberikan kepada mahasiswa Geofisika pada Departemen Fisika, Fakultas MIPA, Universitas Indonesia.

Acuan utama untuk edisi perdana ini adalah buku *Geophysical Data Analysis: Understanding Inverse Problem Theory and Practice* yang ditulis oleh Max A. Meju dan diterbitkan oleh Society of Exploration Geophysicists pada tahun 1994.

Semoga keberadaan buku ini dapat membantu mahasiswa geofisika untuk memiliki kemampuan memformulasikan masalah, menyusun hipotesis, metode dan solusi sehingga mampu menyelesaikan masalah-masalah geofisika secara mandiri.

Terima kasih yang tak terhingga ingin saya sampaikan kepada Dede Djuhana yang telah bersedia berbagi memberikan file format buku dalam \LaTeX sehingga tampilan buku ini menjadi jauh lebih baik.

Depok, 15 Maret 2007
Supriyanto S.

Daftar Isi

Lembar Persembahan	i
Kata Pengantar	v
Daftar Isi	vii
Daftar Gambar	ix
Daftar Tabel	xi
1 Pendahuluan	1
1.1 Definisi dan Konsep Dasar	1
1.2 Proses geofisika	3
1.3 Eksplorasi geofisika dan inversi	3
1.4 Macam-macam data geofisika	3
1.5 Deskripsi proses geofisika: Model matematika	4
1.6 Diskritisasi dan linearisasi	5
2 Formulasi Masalah Inversi	9
2.1 Klasifikasi masalah inversi	9
2.2 Inversi Model Garis	9
2.3 Inversi Model Parabola	12
2.4 Inversi Model Bidang	15
2.5 Contoh aplikasi	17
2.5.1 Menghitung gravitasi di planet X	17
2.6 Kesimpulan	21
3 Penyelesaian Masalah Overdetermined	23
3.1 Regresi linear sederhana	23
3.2 Metode <i>least square</i>	23
3.3 Aplikasi <i>least square</i> pada interpretasi seismik refraksi	26
3.4 Inversi <i>least squares</i> linear: pendekatan matriks	27
3.5 Soal	28
4 Constrained Linear Least Squares Inversion	29
4.1 Inversi dengan informasi awal	29
4.1.1 Memformulasikan persamaan terkonstrain	30
4.1.2 Contoh aplikasi inversi terkonstrain	31

4.2	Inversi dengan Smoothness	33
4.2.1	Formulasi masalah	33
4.2.2	Solusi masalah	34
	Daftar Pustaka	37
	Indeks	39

Daftar Gambar

1.1	Alur pemodelan inversi	2
1.2	Alur pemodelan forward	2
1.3	Alur eksperimen lapangan dan eksperimen laboratorium	4
1.4	Konfigurasi elektroda pada metode Schlumberger	6
2.1	Sebaran data observasi antara temperatur dan kedalaman	10
2.2	Grafik data pengukuran gerak batu	18
2.3	Grafik hasil inversi parabola	21
3.1	Masalah regresi linear (least squares) yang sederhana	24
3.2	Contoh solusi regresi linear	26

Daftar Tabel

2.1	Data temperatur bawah permukaan tanah terhadap kedalaman	10
2.2	Data temperatur bawah permukaan tanah terhadap kedalaman	12
2.3	Data ketinggian terhadap waktu dari planet X	17
3.1	Contoh data observasi yang dapat diolah oleh <i>least squares</i>	24
4.1	Data seismik refraksi: waktu-datang gelombang (t_i) pada empat posisi geophone (x_i)	32

Pendahuluan

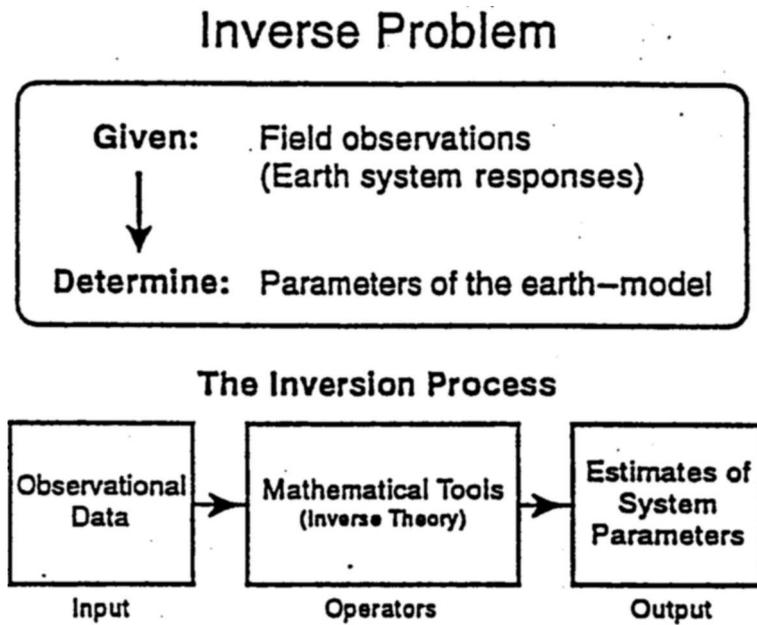
1.1 Definisi dan Konsep Dasar

Dalam geofisika, kegiatan pengukuran lapangan selalu dilakukan berdasarkan prosedur yang sudah ditentukan. Kemudian, hasil pengukuran dicatat dan disajikan dalam bentuk tabel angka-angka pengukuran. Hasil pengukuran tersebut sudah barang tentu sangat tergantung pada kondisi dan sifat fisis batuan bawah permukaan. Tabel angka-angka itu selanjutnya disebut **data observasi** atau juga biasa disebut **data lapangan**.

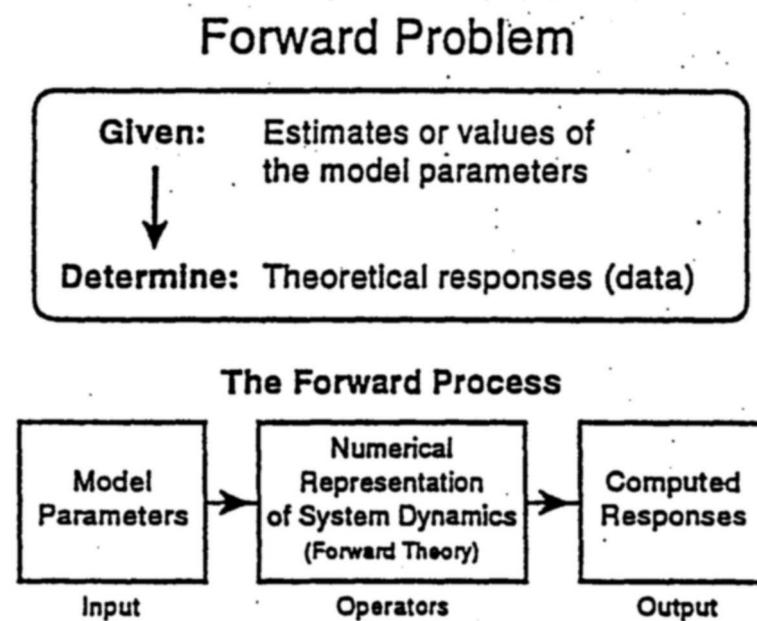
Kita berharap data eksperimen dapat memberi informasi sebanyak-banyaknya, tidak sekedar mengenai sifat fisis batuan saja, melainkan juga kondisi geometri batuan bawah permukaan dan posisi kedalaman batuan tersebut. Informasi itu hanya bisa kita dapat bila kita mengetahui hubungan antara sifat fisis batuan tersebut dan data observasinya. Penghubung dari keduanya hampir selalu berupa persamaan matematika atau kita menyebutnya sebagai **model matematika**. Maka dengan berdasarkan model matematika itulah, kita bisa mengekstrak parameter fisis batuan dari data observasi. Proses ini disebut proses **inversi** atau istilah asingnya disebut **inverse modelling**, lihat Gambar 2.3. Sementara proses kebalikannya dimana kita ingin memperoleh data prediksi hasil pengukuran berdasarkan parameter fisis yang sudah diketahui, maka proses ini disebut proses **forward** atau **forward modelling**, lihat Gambar 1.2.

Proses inversi adalah suatu proses pengolahan data lapangan yang melibatkan teknik penyelesaian matematika dan statistik untuk mendapatkan informasi yang berguna mengenai distribusi sifat fisis bawah permukaan. Di dalam proses inversi, kita melakukan analisis terhadap data lapangan dengan cara melakukan **curve fitting** (pencocokan kurva) antara model matematika dan data lapangan. Tujuan dari proses inversi adalah untuk mengestimasi parameter fisis batuan yang tidak diketahui sebelumnya (**unknown parameter**). Proses inversi terbagi dalam level-level tertentu mulai dari yang paling sederhana seperti *fitting* garis untuk data seismik refraksi sampai kepada level yang rumit seperti tomografi akustik dan *matching* (pencocokan) kurva resistivity yang multidimensi. Contoh problem inversi dalam bidang geofisika adalah

1. Penentuan struktur bawah tanah
2. Estimasi parameter-parameter bahan tambang



Gambar 1.1: Alur pemodelan inversi



Gambar 1.2: Alur pemodelan forward

3. Estimasi parameter-parameter akumulasi sumber energi
4. Penentuan lokasi gempa bumi berdasarkan waktu gelombang datang
5. Pemodelan respon *lithosphere* untuk mengamati proses sedimentasi
6. Analisis sumur bor pada hidrogeologi

1.2 Proses geofisika

Perambatan gelombang seismik, perambatan gelombang elektromagnetik di bawah tanah dan juga aliran muatan (arus listrik) ataupun arus fluida pada batuan berpori adalah contoh-contoh **proses geofisika**. Data lapangan tak lain merupakan refleksi dari kompleksitas sistem geofisika yang sedang diamati, yang dikontrol oleh distribusi parameter fisis batuan berikut struktur geologinya.

1.3 Eksplorasi geofisika dan inversi

Tujuan utama dari kegiatan eksplorasi geofisika adalah untuk membuat **model** bawah permukaan bumi dengan mengandalkan data lapangan yang diukur bisa pada permukaan bumi atau di bawah permukaan bumi atau bisa juga di atas permukaan bumi dari ketinggian tertentu. Untuk mencapai tujuan ini, idealnya kegiatan survey atau pengukuran harus dilakukan secara terus menerus, berkelanjutan dan terintegrasi menggunakan sejumlah ragam metode geofisika.

Seringkali –bahkan hampir pasti– terjadi beberapa kendala akan muncul dan tak bisa dihindari, seperti kehadiran *noise* pada data yang diukur. Ada juga kendala ketidaklengkapan data atau malah kurang alias tidak cukup. Namun demikian, dengan analisis data yang paling mungkin, kita berupaya memperoleh informasi yang relatif valid berdasarkan keterbatasan data yang kita miliki.

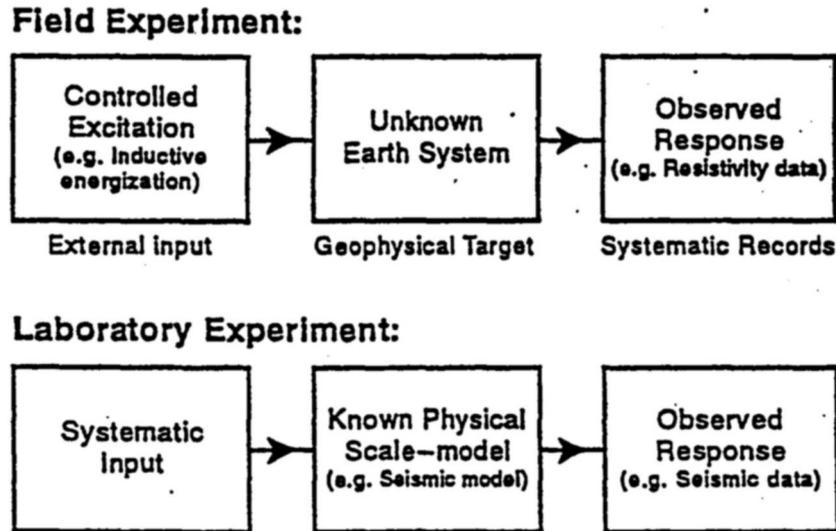
Dalam melakukan analisis, sejumlah informasi mengenai kegiatan akuisisi data juga diperlukan, antara lain: berapakah nilai *sampling rate* yang optimal? Berapa jumlah data yang diperlukan? Berapa tingkat akurasi yang diinginkan? Selanjutnya –masih bagian dari proses analisis– model matematika yang cocok mesti ditentukan yang mana akan berperan ketika menghubungkan antara data lapangan dan distribusi parameter fisis yang hendak dicari.

Setelah proses analisis dilalui, langkah berikutnya adalah membuat model bawah permukaan yang nantinya akan menjadi modal dasar interpretasi. Ujung dari rangkaian proses ini adalah penentuan lokasi pemboran untuk mengangkat sumber daya alam bahan tambang/mineral dan *oil-gas* ke permukaan. Kesalahan penentuan lokasi berdampak langsung pada kerugian meteril yang besar dan waktu yang terbuang percuma. Dari sini terlihat betapa pentingnya proses analisis apalagi bila segala keputusan diambil berdasarkan data eksperimen.

1.4 Macam-macam data geofisika

Data geofisika bisa diperoleh dari pengukuran di lapangan atau bisa juga dari pengukuran di laboratorium. Gambar 1.3 memperlihatkan alur pengambilan data dari masing-masing pen-

Gathering Data



Gambar 1.3: Alur eksperimen lapangan dan eksperimen laboratorium

gukuran.

Pada pengukuran lapangan, data geofisika yang terukur antara lain bisa berupa densitas, kecepatan gelombang seismik, modulus bulk, hambatan jenis batuan, permeabilitas batuan, suseptibilitas magnet dan lain sebagainya yang termasuk dalam besaran fisis sebagai karakteristik bawah permukaan bumi.

Pada pengukuran di laboratorium, model lapisan bumi ataupun keberadaan anomali dalam skala kecil dapat dibuat dan diukur respon-nya sebagai data geofisika. Diharapkan hasil uji laboratorium tersebut bisa mewakili kondisi lapangan yang sesungguhnya yang dimensinya jauh lebih besar.

Jika suatu pengukuran diulang berkali-kali, entah itu di lapangan maupun di laboratorium, seringkali kita temukan hasil pengukuran yang berubah-ubah, walaupun dengan variasi yang bisa ditolerir. Variasi ini umumnya disebabkan oleh kesalahan instrumen pengukuran (*instrumental error*) atau bisa juga dikarenakan kesalahan manusia (*human error*). Seluruh variasi ini bila di-plot kedalam histogram akan membentuk distribusi probabilitistik.

1.5 Deskripsi proses geofisika: Model matematika

Seluruh proses geofisika dapat dideskripsikan secara matematika. Sebagaimana yang telah disebutkan diawal, suatu formulasi yang bisa menjelaskan sistem geofisika disebut **model**. Namun perlu ditekankan juga bahwa istilah model memiliki ragam konotasi berbeda di kalangan geosaintis. Misalnya, orang geologi kerap kali menggunakan istilah **model konseptual**, atau istilah **model fisik** yang digunakan untuk menyebutkan hasil laboratorium, atau dalam catatan ini kita menggunakan istilah **model matematika** yang merupakan istilah umum dikalangan para ahli

geofisika.

Kebanyakan proses geofisika dapat dideskripsikan oleh persamaan integral berbentuk

$$d_i = \int_0^z K_i(z)p(z)dz \quad (1.1)$$

dimana d_i adalah respon atau data yang terukur, $p(z)$ adalah suatu fungsi yang berkaitan dengan parameter fisis yang hendak dicari (misalnya: hambatan jenis, densitas, kecepatan, dan lain-lain) yang selanjutnya disebut **parameter model**, dan K_i disebut **data kernel**. Data kernel menjelaskan hubungan antara data dan parameter model $p(z)$. Parameter model (misalnya kecepatan, resistivitas dan densitas) bisa jadi merupakan fungsi yang kontinu terhadap jarak atau posisi. Sebagai contoh, waktu tempuh t antara sumber gelombang seismik dengan penerimanya sepanjang lintasan L dalam medium, yang distribusi kecepatan gelombangnya kontinu $v(x, z)$, ditentukan oleh

$$t = \int_L \frac{1}{v(x, z)} dl \quad (1.2)$$

Deskripsi matematika terhadap sistem geofisika seperti contoh di atas disebut **forward modelling**. *forward modelling* digunakan untuk memprediksi data simulasi berdasarkan hipotesa kondisi bawah permukaan. Data simulasi tersebut biasanya dinamakan **data teoritik** atau **data sintetik** atau **data prediksi** atau **data kalkulasi**. Cara seperti ini disebut pendekatan forward atau lebih dikenal sebagai **pemodelan forward** (Gambar 1.2).

1.6 Diskritisasi dan linearisasi

Dalam banyak kasus, model bumi selalu fungsi kontinu terhadap jarak dan kedalaman. Mari kita ambil kasus massa dan momen inersia bumi. Keduanya terkait dengan densitas bawah permukaan sesuai rumus-rumus berikut

$$Massa = 4\pi \int_0^R r^2 \rho(r) dr \quad (1.3)$$

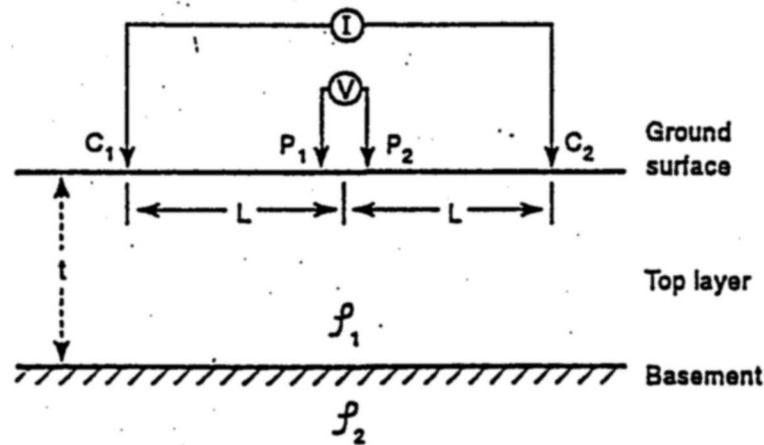
$$Moment \ inersia = \frac{8\pi}{3} \int_0^R r^4 \rho(r) dr \quad (1.4)$$

dimana R adalah jejari bumi dan $\rho(r)$ merupakan fungsi densitas terhadap jarak r . $\rho(r)$ juga berhubungan dengan $p(z)$ pada persamaan (1.1). Persamaan (1.3 dan 1.4) dapat dinyatakan dalam formulasi yang lebih umum yaitu

$$d_i = \int_0^R K_i(r)p(r) dr \quad (1.5)$$

sama persis dengan persamaan (1.1). Integral ini relatif mudah dievaluasi secara komputasi dengan matematika diskrit. Pendekatan komputasi memungkinkan kita untuk menyederhanakan $\rho(r)dr$ menjadi m , sementara K_i menjadi G_i sehingga persamaan (1.5) dapat dinyatakan sebagai

$$d_i = \sum G_{ij}m_j \quad (1.6)$$



Gambar 1.4: Konfigurasi elektroda pada metode Schlumberger

Ini adalah bentuk **diskritisasi**. Secara umum, memang pada kenyataannya ketika melakukan eksperimen di lapangan, data pengukuran maupun parameter model selalu dibatasi pada interval tertentu. Kita sering berasumsi bahwa bawah permukaan bumi terdiri dari lapisan-lapisan yang masing-masing memiliki sifat fisis atau parameter fisis $p(z)$ yang seragam. Misalnya lapisan tertentu memiliki densitas sekian dan ketebalan sekian. Langkah praktis ini yang terkesan menyederhanakan obyek lapangan disebut langkah **parameterisasi**. Dalam kuliah ini, kita akan selalu memandang model yang diskrit dan juga parameter yang diskrit daripada model dan parameter yang kontinu. Sehingga proses inversi yang akan kita lakukan disebut sebagai **teori inversi diskrit** dan bukan **teori inversi kontinu**.

Dalam bentuk diskrit, persamaan (1.2) bisa dinyatakan sebagai

$$t_i = \sum_{j=1}^p \frac{L_{ij}}{v_j} \quad (1.7)$$

Perlu dicatat disini bahwa waktu tempuh t tidak berbanding lurus dengan parameter model v , melainkan berbanding terbalik. Hubungan ini dinamakan non-linear terhadap v . Namun demikian, jika kita mendefinisikan parameter model $c = 1/v$, dimana c adalah slowness gelombang seismik, maka problem ini bisa dinyatakan sebagai

$$t_i = \sum_{j=1}^p L_{ij} c_j \quad (1.8)$$

Hubungan ini disebut linear. Persamaan memenuhi bentuk $d = Gm$. Operasi transformasi seperti itu dinamakan **linearisasi parameter**. Dan proses menuju kesana dinamakan **linearisasi**.

Sekarang mari kita lihat problem dari pengukuran resistivitas semu dengan metode Schlumberger untuk mengamati lapisan bawah permukaan yang diasumsikan terdiri dari dua lapisan. Formula model yang diturunkan oleh Parasnis, 1986 adalah

$$\rho_a(L) = \rho_1 \left(1 + 2L^2 \int_0^\infty K(\lambda) J_1(\lambda L) \lambda d\lambda \right) \quad (1.9)$$

dimana $L = AB/2$ adalah jarak masing-masing elektroda terhadap titik tengah, J_1 adalah fungsi Bessel orde 1 dan $K(\lambda)$ adalah fungsi parameter (resistivitas masing-masing lapisan yaitu ρ_1 dan ρ_2 serta ketebalan lapisan paling atas t) dari sistem yang kita asumsikan. $K(\lambda)$ dinyatakan sebagai

$$K(\lambda) = \frac{-k_{1,2}^{(-2\lambda t)}}{1 + -k_{1,2}^{(-2\lambda t)}}$$

dimana

$$k_{1,2} = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$$

Kita bisa lihat bahwa persamaan (1.9) tidak bisa didekati dengan $d = Gm$ sebagaimana yang dilakukan pada persamaan (1.2). Oleh karena itu persamaan resistivitas semu di atas disebut **highly non-linear**.

Formulasi Masalah Inversi

2.1 Klasifikasi masalah inversi

Dalam masalah inversi, kita selalu berhubungan dengan parameter model (M) dan jumlah data (N) yang mana jumlah dari masing-masing akan menentukan klasifikasi permasalahan inversi dan cara penyelesaiannya. Bila jumlah model parameter lebih sedikit dibandingkan data lapangan ($M < N$), maka ini disebut **overdetermined**, dan cara penyelesaiannya biasanya menggunakan pencocokan (*best fit*) terhadap data lapangan. Jika dalam kondisi yang lain dimana jumlah parameter yang ingin dicari lebih banyak dari pada jumlah datanya, maka ini disebut problem **underdetermined**. Dalam kasus ini terdapat sekian banyak model yang dapat sesuai kondisi datanya. Masalah ini disebut **non-uniqueness**. Bagaimana cara untuk mendapatkan model yang paling mendekati kondisi bawah permukaan? Menurut Meju, 1994 persoalan ini bisa diselesaikan dengan model yang parameternya berbentuk fungsi kontinyu terhadap posisi. Kasus yang terakhir adalah ketika jumlah data sama atau hampir sama dengan jumlah parameter. Ini disebut **evendetermined**. Pada kasus ini model yang paling sederhana dapat diperoleh dengan metode inversi langsung.

Pada bab ini, saya mencoba menyajikan dasar teknik inversi yang diaplikasikan pada model garis, model parabola dan model bidang. Uraian aplikasi tersebut diawali dari ketersediaan data observasi, lalu sejumlah parameter model (*unknown parameter*) mesti dicari dengan teknik inversi. Mari kita mulai dari model garis.

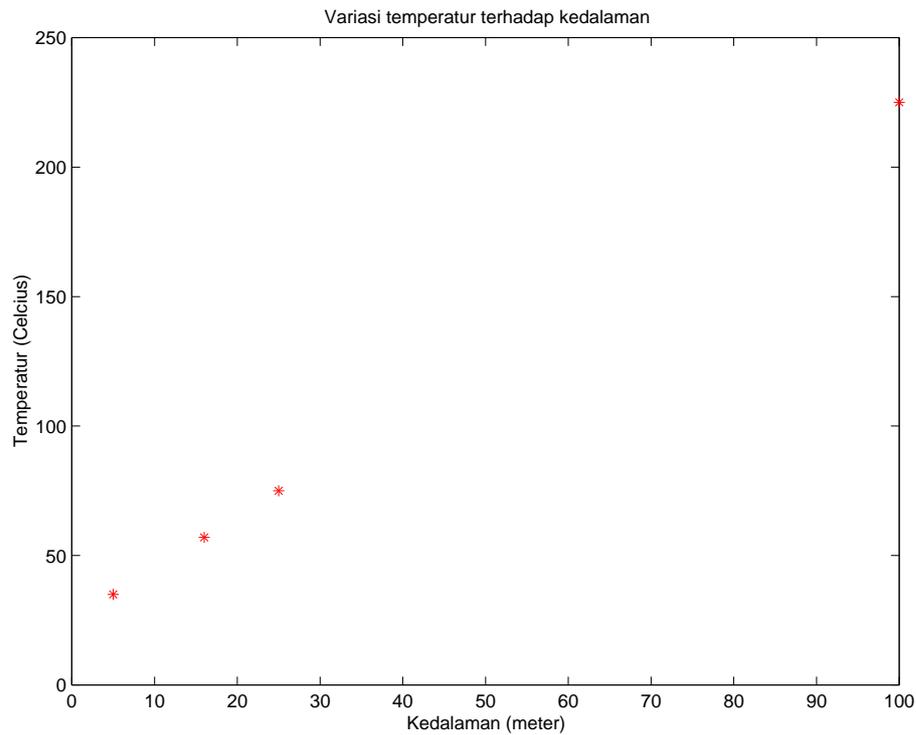
2.2 Inversi Model Garis

Pengukuran temperatur terhadap kedalaman di bawah permukaan bumi menunjukkan bahwa semakin dalam, temperatur semakin tinggi. Misalnya telah dilakukan sebanyak empat kali ($N = 4$) pengukuran temperatur (T_i) pada kedalaman yang berbeda beda (z_i). Tabel pengukuran secara sederhana disajikan seperti ini: Grafik sebaran data observasi ditampilkan pada Gambar 2.1. Lalu kita berasumsi bahwa variasi temperatur terhadap kedalaman ditentukan oleh rumus berikut ini:

$$m_1 + m_2 z_i = T_i \quad (2.1)$$

Tabel 2.1: Data temperatur bawah permukaan tanah terhadap kedalaman

Pengukuran ke- i	Kedalaman (m)	Temperatur ($^{\circ}C$)
1	$z_1 = 5$	$T_1 = 35$
2	$z_2 = 16$	$T_2 = 57$
3	$z_3 = 25$	$T_3 = 75$
4	$z_4 = 100$	$T_4 = 225$



Gambar 2.1: Sebaran data observasi antara temperatur dan kedalaman

dimana m_1 dan m_2 adalah konstanta-konstanta yang akan dicari. Rumus di atas disebut **model matematika**. Sedangkan m_1 dan m_2 disebut **parameter model** atau biasa juga disebut **unknown parameter**. Pada model matematika di atas terdapat dua buah parameter model, ($M = 2$). Sementara jumlah data observasi ada empat, ($N = 4$), yaitu nilai-nilai kedalaman, z_i , dan temperatur, T_i . Berdasarkan model tersebut, kita bisa menyatakan temperatur dan kedalaman masing-masing sebagai berikut:

$$m_1 + m_2 z_1 = T_1$$

$$m_1 + m_2 z_2 = T_2$$

$$m_1 + m_2 z_3 = T_3$$

$$m_1 + m_2 z_4 = T_4$$

Semua persamaan tersebut dapat dinyatakan dalam operasi matrik berikut ini:

$$\begin{bmatrix} 1 & z_1 \\ 1 & z_2 \\ 1 & z_3 \\ 1 & z_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Lalu ditulis secara singkat

$$G\mathbf{m} = \mathbf{d} \quad (2.3)$$

dimana \mathbf{d} adalah data yang dinyatakan dalam vektor kolom, \mathbf{m} adalah model parameter, juga dinyatakan dalam vektor kolom, dan G disebut **matrik kernel**. Lantas bagaimana cara mendapatkan nilai m_1 dan m_2 pada vektor kolom \mathbf{m} ? Manipulasi¹ berikut ini bisa menjawabnya

$$G^t G\mathbf{m} = G^t \mathbf{d} \quad (2.4)$$

dimana t disini maksudnya adalah tanda transpos matrik. Selanjutnya, untuk mendapatkan elemen-elemen \mathbf{m} , diperlukan langkah-langkah perhitungan berikut ini:

1. Tentukan transpos dari matrik kernel, yaitu G^t

$$G = \begin{bmatrix} 1 & z_1 \\ 1 & z_2 \\ 1 & z_3 \\ 1 & z_4 \end{bmatrix} \Rightarrow G^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix}$$

2. Lakukan perkalian matriks $G^t G$

$$G^t G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & z_1 \\ 1 & z_2 \\ 1 & z_3 \\ 1 & z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N & \sum z_i \\ \sum z_i & \sum z_i^2 \end{bmatrix}$$

dimana $N = 4$ dan $i = 1, 2, 3, 4$.

3. Kemudian tentukan pula $G^t \mathbf{d}$

$$G^t \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum T_i \\ \sum z_i T_i \end{bmatrix}$$

¹Matrik G biasanya tidak berbentuk bujursangkar. Akibatnya tidak bisa dihitung nilai invers-nya. Dengan mengalikan matrik G dan transpose matrik G , maka akan diperoleh matrik bujursangkar

4. Sekarang persamaan (2.4) dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{bmatrix} N & \sum z_i \\ \sum z_i & \sum z_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum T_i \\ \sum z_i T_i \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Berdasarkan data observasi pada tabel di atas, diperoleh

$$\begin{bmatrix} 4 & 146 \\ 146 & 10906 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 392 \\ 25462 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Operasi matriks di atas akan menghasilkan nilai $m_1 = 25$ dan $m_2 = 2$.

Program Matlab telah menyediakan sebuah baris perintah untuk menghitung elemen-elemen m , yaitu

```
m=inv(G'*G)*G'*d
```

Demikianlah contoh aplikasi teknik inversi untuk menyelesaikan persoalan model garis. Anda bisa mengaplikasikan pada kasus lain, dengan syarat kasus yang anda tangani memiliki bentuk model yang sama dengan yang telah dikerjakan pada catatan ini, yaitu model garis: $y = m_1 + m_2x$. Selanjutnya mari kita pelajari inversi model parabola.

2.3 Inversi Model Parabola

Kembali kita ambil contoh variasi temperatur terhadap kedalaman dengan sedikit modifikasi data. Misalnya telah dilakukan sebanyak delapan kali ($N = 8$) pengukuran temperatur (T_i) pada kedalaman yang berbeda beda (z_i). Tabel pengukuran yang diperoleh adalah: Lalu kita

Tabel 2.2: Data temperatur bawah permukaan tanah terhadap kedalaman

Pengukuran ke- i	Kedalaman (m)	Temperatur ($^{\circ}C$)
1	$z_1 = 5$	$T_1 = 21,75$
2	$z_2 = 8$	$T_2 = 22,68$
3	$z_3 = 14$	$T_3 = 25,62$
4	$z_4 = 21$	$T_4 = 30,87$
5	$z_5 = 30$	$T_5 = 40,5$
6	$z_6 = 36$	$T_6 = 48,72$
7	$z_7 = 45$	$T_7 = 63,75$
8	$z_8 = 60$	$T_8 = 96$

berasumsi bahwa variasi temperatur terhadap kedalaman memenuhi model matematika berikut ini:

$$m_1 + m_2z_i + m_3z_i^2 = T_i \quad (2.7)$$

dimana m_1 , m_2 dan m_3 adalah **unknown parameter**. Jadi pada model di atas terdapat tiga buah model parameter, ($M = 3$). Adapun yang berlaku sebagai **data** adalah nilai-nilai temperatur T_1 , T_2, \dots , dan T_8 . Berdasarkan model tersebut, kita bisa menyatakan temperatur dan kedalaman sebagai sistem persamaan simultan yang terdiri atas 8 persamaan (sesuai dengan jumlah data

observasi):

$$\begin{aligned}
 m_1 + m_2 z_1 + m_3 z_1^2 &= T_1 \\
 m_1 + m_2 z_2 + m_3 z_2^2 &= T_2 \\
 m_1 + m_2 z_3 + m_3 z_3^2 &= T_3 \\
 m_1 + m_2 z_4 + m_3 z_4^2 &= T_4 \\
 m_1 + m_2 z_5 + m_3 z_5^2 &= T_5 \\
 m_1 + m_2 z_6 + m_3 z_6^2 &= T_6 \\
 m_1 + m_2 z_7 + m_3 z_7^2 &= T_7 \\
 m_1 + m_2 z_8 + m_3 z_8^2 &= T_8
 \end{aligned}$$

Semua persamaan tersebut dapat dinyatakan dalam operasi matrik berikut ini:

$$\begin{bmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 \\ 1 & z_2 & z_2^2 \\ 1 & z_3 & z_3^2 \\ 1 & z_4 & z_4^2 \\ 1 & z_5 & z_5^2 \\ 1 & z_6 & z_6^2 \\ 1 & z_7 & z_7^2 \\ 1 & z_8 & z_8^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ T_7 \\ T_8 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Lalu ditulis secara singkat

$$G\mathbf{m} = \mathbf{d} \quad (2.9)$$

dimana \mathbf{d} adalah data yang dinyatakan dalam vektor kolom, \mathbf{m} adalah model parameter, juga dinyatakan dalam vektor kolom, dan G disebut **matrik kernel**. Lantas bagaimana cara mendapatkan nilai m_1 , m_2 dan m_3 pada vektor kolom \mathbf{m} ? Manipulasi berikut ini bisa menjawabnya

$$G^t G\mathbf{m} = G^t \mathbf{d} \quad (2.10)$$

dimana t disini maksudnya adalah tanda transpos matrik. Selanjutnya, untuk mendapatkan elemen-elemen \mathbf{m} , diperlukan langkah-langkah perhitungan berikut ini:

1. Tentukan transpos dari matrik kernel, yaitu G^t

$$G = \begin{bmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 \\ 1 & z_2 & z_2^2 \\ 1 & z_3 & z_3^2 \\ 1 & z_4 & z_4^2 \\ 1 & z_5 & z_5^2 \\ 1 & z_6 & z_6^2 \\ 1 & z_7 & z_7^2 \\ 1 & z_8 & z_8^2 \end{bmatrix} \Rightarrow G^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & z_7 & z_8 \\ z_1^2 & z_2^2 & z_3^2 & z_4^2 & z_5^2 & z_6^2 & z_7^2 & z_8^2 \end{bmatrix}$$

2. Tentukan $G^t G$

$$G^t G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & z_7 & z_8 \\ z_1^2 & z_2^2 & z_3^2 & z_4^2 & z_5^2 & z_6^2 & z_7^2 & z_8^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 \\ 1 & z_2 & z_2^2 \\ 1 & z_3 & z_3^2 \\ 1 & z_4 & z_4^2 \\ 1 & z_5 & z_5^2 \\ 1 & z_6 & z_6^2 \\ 1 & z_7 & z_7^2 \\ 1 & z_8 & z_8^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N & \sum z_i & \sum z_i^2 \\ \sum z_i & \sum z_i^2 & \sum z_i^3 \\ \sum z_i^2 & \sum z_i^3 & \sum z_i^4 \end{bmatrix}$$

dimana $N = 8$ dan $i = 1, 2, 3, \dots, 8$.

3. Kemudian tentukan pula $G^t \mathbf{d}$

$$G^t \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & z_7 & z_8 \\ z_1^2 & z_2^2 & z_3^2 & z_4^2 & z_5^2 & z_6^2 & z_7^2 & z_8^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ T_7 \\ T_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum T_i \\ \sum z_i T_i \\ \sum z_i^2 T_i \end{bmatrix}$$

4. Sekarang persamaan (2.15) dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{bmatrix} N & \sum z_i & \sum z_i^2 \\ \sum z_i & \sum z_i^2 & \sum z_i^3 \\ \sum z_i^2 & \sum z_i^3 & \sum z_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum T_i \\ \sum z_i T_i \\ \sum z_i^2 T_i \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Berdasarkan data observasi pada tabel di atas, diperoleh

$$\begin{bmatrix} 8 & 219 & 8547 \\ 219 & 8547 & 393423 \\ 8547 & 393423 & 19787859 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 349,89 \\ 12894,81 \\ 594915,33 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Program Matlab telah menyediakan sebuah baris perintah untuk menghitung elemen-elemen m , yaitu

```
m=inv(G'*G)*G'*d
```

Sehingga operasi matriks di atas akan menghasilkan nilai $m_1 = 21$, $m_2 = 0,05$ dan $m_3 = 0,02$.

Demikianlah contoh aplikasi teknik inversi untuk menyelesaikan persoalan model parabola. Anda bisa mengaplikasikan pada kasus lain, dengan syarat kasus yang anda tangani memiliki bentuk model yang sama dengan yang telah dikerjakan pada catatan ini, yaitu model garis: $y = m_1 + m_2x + m_3x^2$. Selanjutnya mari kita pelajari inversi model bidang atau model 2-dimensi (2-D).

2.4 Inversi Model Bidang

Dalam catatan ini saya belum sempat mencari contoh data observasi yang sesuai untuk model 2-dimensi. Maka, saya ingin langsung saja mengajukan sebuah model matematika untuk 2-dimensi berikut ini:

$$m_1 + m_2x_i + m_3y_i = d_i \quad (2.13)$$

dimana m_1 , m_2 dan m_3 merupakan *unknown parameter* yang akan dicari. Adapun yang berlaku sebagai **data** adalah $d_1, d_2, d_3, \dots, d_i$. Berdasarkan model matematika tersebut, kita bisa nyatakan

$$\begin{aligned} m_1 + m_2x_1 + m_3y_1 &= d_1 \\ m_1 + m_2x_2 + m_3y_2 &= d_2 \\ m_1 + m_2x_3 + m_3y_3 &= d_3 \\ \vdots & \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ m_1 + m_2x_N + m_3y_N &= d_N \end{aligned}$$

Semua persamaan tersebut dapat dinyatakan dalam operasi matrik berikut ini:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_N & y_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_N \end{bmatrix}$$

Lalu ditulis secara singkat

$$G\mathbf{m} = \mathbf{d} \quad (2.14)$$

dimana \mathbf{d} adalah data yang dinyatakan dalam vektor kolom, \mathbf{m} adalah *unknown parameter*, juga dinyatakan dalam vektor kolom, dan G disebut **matrik kernel**. Lantas bagaimana cara mendapatkan nilai m_1 , m_2 dan m_3 pada vektor kolom \mathbf{m} ? Sama seperti sebelumnya, kita harus membuat persamaan matriks berikut ini

$$G^t G\mathbf{m} = G^t \mathbf{d} \quad (2.15)$$

dimana t disini maksudnya adalah tanda transpos matrik. Selanjutnya, untuk mendapatkan elemen-elemen \mathbf{m} , diperlukan langkah-langkah perhitungan berikut ini:

1. Tentukan transpos dari matrik kernel, yaitu G^t

$$G = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_N & y_N \end{bmatrix} \Rightarrow G^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_N \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_N \end{bmatrix}$$

2. Tentukan $G^t G$

$$G^t G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_N \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_N & y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N & \sum x_i & \sum y_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i y_i \\ \sum y_i & \sum x_i y_i & \sum y_i^2 \end{bmatrix}$$

dimana N = jumlah data. dan $i = 1, 2, 3, \dots, N$.

3. Kemudian tentukan pula $G^t \mathbf{d}$

$$G^t \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_N \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum d_i \\ \sum x_i d_i \\ \sum y_i d_i \end{bmatrix}$$

4. Sekarang, persamaan (2.15) dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{bmatrix} N & \sum x_i & \sum y_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i y_i \\ \sum y_i & \sum x_i y_i & \sum y_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum d_i \\ \sum x_i d_i \\ \sum y_i d_i \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

5. Sampai disini, jika tersedia data observasi, maka anda tinggal memasukan data tersebut ke dalam persamaan di atas, sehingga nilai elemen-elemen m dapat dihitung dengan perintah matlab

$$m = \text{inv}(G' * G) * G' * d$$

Langkah-langkah selanjutnya akan sama persis dengan catatan sebelumnya (**model linear** dan **model parabola**)

Anda bisa mengaplikasikan data pengukuran yang anda miliki, dengan syarat kasus yang anda tangani memiliki bentuk **model** yang sama dengan yang telah dikerjakan pada catatan ini, yaitu memiliki tiga buah model parameter yang tidak diketahui dalam bentuk persamaan bidang (atau 2-dimensi): $d = m_1 + m_2x + m_3y$.

2.5 Contoh aplikasi

2.5.1 Menghitung gravitasi di planet X

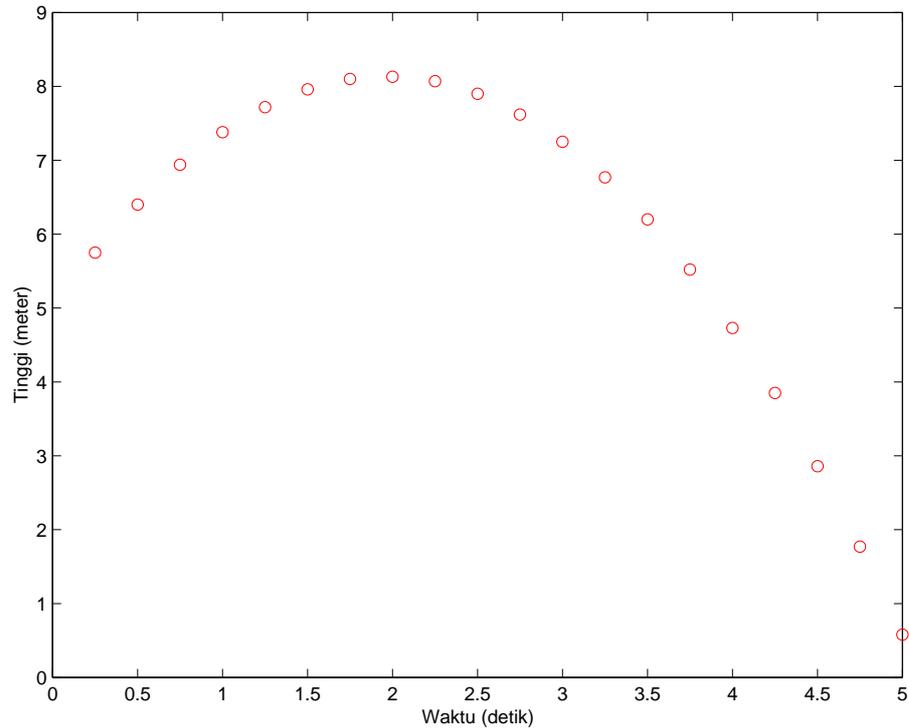
Seorang astronot tiba di suatu planet yang tidak dikenal. Setibanya disana, ia segera mengeluarkan kamera otomatis, lalu melakukan eksperimen kinematika yaitu dengan melempar batu vertikal ke atas. Hasil foto-foto yang terekam dalam kamera otomatis adalah sebagai berikut Plot data pengukuran waktu vs ketinggian diperlihatkan pada Gambar 2.2. Anda diminta un-

Tabel 2.3: Data ketinggian terhadap waktu dari planet X

Waktu (dt)	Ketinggian (m)	Waktu (dt)	Ketinggian (m)
0,00	5,00	2,75	7,62
0,25	5,75	3,00	7,25
0,50	6,40	3,25	6,77
0,75	6,94	3,50	6,20
1,00	7,38	3,75	5,52
1,25	7,72	4,00	4,73
1,50	7,96	4,25	3,85
1,75	8,10	4,50	2,86
2,00	8,13	4,75	1,77
2,25	8,07	5,00	0,58
2,50	7,90		

tuk membantu proses pengolahan data sehingga diperoleh nilai konstanta gravitasi di planet tersebut dan kecepatan awal batu. Jelas, ini adalah persoalan inversi, yaitu mencari *unkown parameter* (konstanta gravitasi dan kecepatan awal batu) dari data observasi (hasil foto gerak sebuah batu).

Langkah awal untuk memecahkan persoalan ini adalah dengan mengajukan asumsi model matematika, yang digali dari konsep-konsep fisika, yang kira-kira paling cocok dengan situasi pengambilan data observasi. Salah satu konsep dari fisika yang bisa diajukan adalah konsep



Gambar 2.2: Grafik data pengukuran gerak batu

tentang Gerak-Lurus-Berubah-Beraturan (GLBB), yang formulasinya seperti ini

$$h_o + v_o t - \frac{1}{2}gt^2 = h$$

Berdasarkan tabel data observasi, ketinggian pada saat $t = 0$ adalah 5 m. Itu artinya $h_o = 5$ m. Sehingga model matematika (formulasi GLBB) dapat dimodifikasi sedikit menjadi

$$v_o t - \frac{1}{2}gt^2 = h - h_o \quad (2.17)$$

Selanjut, didefinisikan m_1 dan m_2 sebagai berikut

$$m_1 = v_o \quad m_2 = -\frac{1}{2}g \quad (2.18)$$

sehingga persamaan model GLBB menjadi

$$m_1 t_i + m_2 t_i^2 = h_i - 5 \quad (2.19)$$

dimana i menunjukkan data ke- i .

Langkah berikutnya adalah menentukan nilai tiap-tiap elemen matrik kernel, yaitu dengan

memasukan data observasi kedalam model matematika (persamaan (2.19))

$$\begin{aligned} m_1 t_1 + m_2 t_1^2 &= h_1 - 5 \\ m_1 t_2 + m_2 t_2^2 &= h_2 - 5 \\ m_1 t_3 + m_2 t_3^2 &= h_3 - 5 \\ \vdots \quad \quad \quad &= \quad \quad \quad \vdots \\ m_1 t_{20} + m_2 t_{20}^2 &= h_{20} - 5 \end{aligned}$$

Semua persamaan tersebut dapat dinyatakan dalam operasi matrik berikut ini:

$$\begin{bmatrix} t_1 & t_1^2 \\ t_2 & t_2^2 \\ t_3 & t_3^2 \\ t_4 & t_4^2 \\ \vdots & \vdots \\ t_{19} & t_{19}^2 \\ t_{20} & t_{20}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 - 5 \\ h_2 - 5 \\ h_3 - 5 \\ \vdots \\ h_{19} - 5 \\ h_{20} - 5 \end{bmatrix}$$

Operasi matrik di atas memenuhi persamaan matrik

$$G\mathbf{m} = \mathbf{d}$$

Seperti yang sudah dipelajari pada bab ini, penyelesaian masalah inversi dimulai dari proses manipulasi persamaan matrik sehingga perkalian antara G^t dan G menghasilkan matriks bujur-sangkar

$$G^t G\mathbf{m} = G^t \mathbf{d} \quad (2.20)$$

Selanjutnya, untuk mendapatkan m_1 dan m_2 , prosedur inversi dilakukan satu-per-satu

1. Menentukan transpos matrik kernel, yaitu G^t

$$G = \begin{bmatrix} t_1 & t_1^2 \\ t_2 & t_2^2 \\ t_3 & t_3^2 \\ t_4 & t_4^2 \\ \vdots & \vdots \\ t_{19} & t_{19}^2 \\ t_{20} & t_{20}^2 \end{bmatrix} \Rightarrow G^t = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & \dots & t_{19} & t_{20} \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 & t_4^2 & \dots & t_{19}^2 & t_{20}^2 \end{bmatrix}$$

2. Menentukan $G^t G$

$$G^t G = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & \dots & t_{19} & t_{20} \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 & t_4^2 & \dots & t_{19}^2 & t_{20}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 & t_1^2 \\ t_2 & t_2^2 \\ t_3 & t_3^2 \\ t_4 & t_4^2 \\ \vdots & \vdots \\ t_{19} & t_{19}^2 \\ t_{20} & t_{20}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum t_i^2 & \sum t_i^3 \\ \sum t_i^3 & \sum t_i^4 \end{bmatrix}$$

dimana $N = 20$ dan $i = 1, 2, \dots, N$.

3. Kemudian menentukan hasil perkalian $G^t \mathbf{d}$

$$G^t \mathbf{d} = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & \dots & t_{19} & t_{20} \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 & t_4^2 & \dots & t_{19}^2 & t_{20}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ \vdots \\ h_{19} \\ h_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum t_i h_i \\ \sum t_i^2 h_i \end{bmatrix}$$

4. Sekarang persamaan (2.20) dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{bmatrix} \sum t_i^2 & \sum t_i^3 \\ \sum t_i^3 & \sum t_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum t_i h_i \\ \sum t_i^2 h_i \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Berdasarkan data observasi, diperoleh

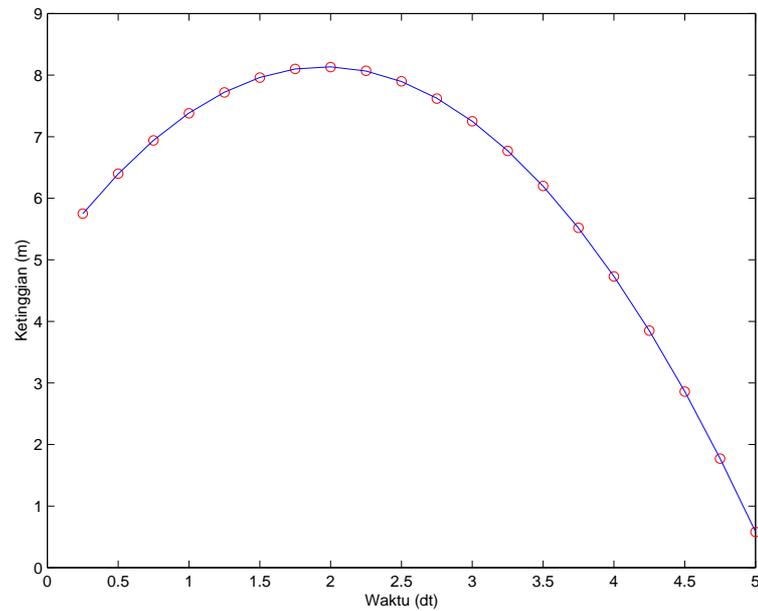
$$\begin{bmatrix} 179,4 & 689,1 \\ 689,1 & 2822,9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 273,7 \\ 796,3 \end{bmatrix}$$

Hasil operasi matriks ini dapat diselesaikan dengan satu baris statemen di matlab yaitu

```
m=inv(G'*G)*G'*d
```

Hasil inversinya adalah nilai kecepatan awal yaitu saat batu dilempar ke atas adalah sebesar $m_1 = v_o = 3,2009$ m/dt. Adapun percepatan gravitasi diperoleh dari m_2 dimana $m_2 = -\frac{1}{2}g = -0,8169$; maka disimpulkan nilai g adalah sebesar $1,6338$ m/dt².

Gambar 2.3 memperlihatkan kurva hasil inversi beserta sebaran titik data observasi. Garis berwarna biru merupakan garis kurva *fitting* hasil inversi parabola. Sedangkan bulatan berwarna merah adalah data pengukuran ketinggian (m) terhadap waktu (dt). Jelas terlihat bahwa garis kurva berwarna biru benar-benar cocok melewati semua titik data pengukuran. Ini menunjukkan tingkat akurasi yang sangat tinggi. Sehingga nilai kecepatan awal dan gravitasi hasil inversi cukup valid untuk menjelaskan gerak batu di planet X.



Gambar 2.3: Grafik hasil inversi parabola

2.6 Kesimpulan

Dari sejumlah contoh pada bab ini, terlihat bahwa matrik kernel kerap kali berubah-ubah, sesuai dengan model matematika. Jadi, model matematika secara otomatis akan mempengaruhi bentuk rupa matrik kernelnya.

Penyelesaian Masalah Overdetermined

3.1 Regresi linear sederhana

Jika suatu masalah inversi dapat direpresentasikan kedalam persamaan $d = Gm$, maka ia disebut **linear**. Kita dapat menjalankan prosedur yang sederhana untuk memperoleh nilai m dari data observasi. Dalam kenyataannya, tidak semua data observasi berhimpit dengan satu garis lurus. Jika kita mencoba melakukan *fitting* terhadap semua titik data observasi kepada satu garis, maka garis yang didapat disebut garis **regresi**. Misalnya, ada satu set data observasi yang ditulis sebagai $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, garis regresi dinyatakan sebagai

$$y = a_0 + a_1x \quad (3.1)$$

dan setiap data memenuhi relasi berikut

$$y_i = a_0 + a_1x_i + e_i \quad (3.2)$$

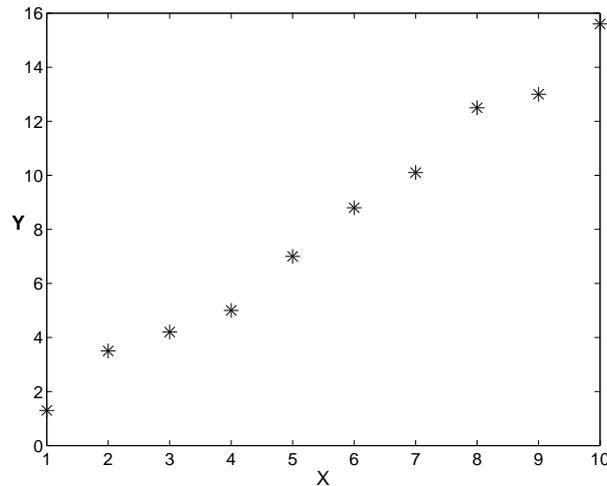
dimana e_i disebut residual, atau sering juga disebut *misfit* atau kesalahan prediksi (*prediction error*). Garis regresi tidak akan berhimpit dengan setiap data observasi dan biasanya untuk kasus inversi seperti ini selalu *overdetermined*. Secara umum, tipe masalah inversi seperti ini diselesaikan dengan metode *least squares*. Dengan metode *least squares*, kita mencoba meminimalkan *error* e dengan cara menentukan nilai a_0 dan a_1 sedemikian rupa sehingga diperoleh jumlah kuadrat *error* (S) yang minimal.

3.2 Metode *least square*

Diketahui data eksperimen tersaji pada Tabel 3.1 Lalu data tersebut di-plot dalam sumbu x dan y . Sekilas, kita bisa melihat bahwa data yang telah di-plot tersebut dapat didekati dengan sebuah persamaan garis, yaitu $a_1x_i + a_0$. Artinya, kita melakukan pendekatan secara linear, dimana fungsi pendekatannya adalah

$$P(x_i) = a_1x_i + a_0 \quad (3.3)$$

x_i	y_i	x_i	y_i
1	1,3	6	8,8
2	3,5	7	10,1
3	4,2	8	12,5
4	5,0	9	13,0
5	7,0	10	15,6

Tabel 3.1: Contoh data observasi yang dapat diolah oleh *least squares*

Gambar 3.1: Masalah regresi linear (least squares) yang sederhana

Problemnya adalah berapakah nilai konstanta a_1 dan a_0 yang sedemikian rupa, sehingga posisi garis tersebut paling mendekati atau bahkan melalui titik-titik data yang telah di-plot di atas? Dengan kata lain, sebisa mungkin y_i sama dengan $P(x_i)$ atau dapat diformulasikan sebagai

$$\sum_{i=1}^m y_i - P(x_i) = 0 \quad (3.4)$$

$$\sum_{i=1}^m y_i - (a_1 x_i + a_0) = 0 \quad (3.5)$$

dimana jumlah data, $m = 10$. Suku yang berada disebelah kiri dinamakan fungsi error (*error function*), yaitu

$$E(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^m y_i - (a_1 x_i + a_0) \quad (3.6)$$

Semua data yang diperoleh melalui eksperimen, fungsi error-nya tidak pernah bernilai nol. Jadi, tidak pernah didapatkan garis yang berhimpit dengan semua titik data eksperimen. Namun demikian, kita masih bisa berharap agar fungsi error menghasilkan suatu nilai, dimana nilai tersebut adalah nilai yang paling minimum atau paling mendekati nol. Harapan tersebut diwujudkan oleh metode **least square** dengan sedikit modifikasi pada fungsi error-nya sehingga

menjadi

$$E(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^m [y_i - (a_1 x_i + a_0)]^2 \quad (3.7)$$

Agar fungsi error bisa mencapai nilai minimum, maka syarat yang harus dipenuhi adalah:

$$\frac{\partial E(a_0, a_1)}{\partial a_i} = 0 \quad (3.8)$$

dimana $i = 0$ dan 1 , karena dalam kasus ini memang cuma ada a_0 dan a_1 . Maka mesti ada dua buah turunan yaitu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(a_0, a_1)}{\partial a_0} &= \frac{\partial}{\partial a_0} \sum_{i=1}^m [y_i - (a_1 x_i + a_0)]^2 = 0 \\ &2 \sum_{i=1}^m (y_i - a_1 x_i - a_0)(-1) = 0 \\ &a_0 \cdot m + a_1 \sum_{i=1}^m x_i = \sum_{i=1}^m y_i \end{aligned} \quad (3.9)$$

dan

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(a_0, a_1)}{\partial a_1} &= \frac{\partial}{\partial a_1} \sum_{i=1}^m [y_i - (a_1 x_i + a_0)]^2 = 0 \\ &2 \sum_{i=1}^m (y_i - a_1 x_i - a_0)(-x_i) = 0 \\ &a_0 \sum_{i=1}^m x_i + a_1 \sum_{i=1}^m x_i^2 = \sum_{i=1}^m x_i y_i \end{aligned} \quad (3.10)$$

Akhirnya persamaan (3.9) dan (3.10) dapat dicari solusinya berikut ini:

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^m x_i^2 \sum_{i=1}^m y_i - \sum_{i=1}^m x_i y_i \sum_{i=1}^m x_i}{m (\sum_{i=1}^m x_i^2) - (\sum_{i=1}^m x_i)^2} \quad (3.11)$$

dan

$$a_1 = \frac{m \sum_{i=1}^m x_i y_i - \sum_{i=1}^m x_i \sum_{i=1}^m y_i}{m (\sum_{i=1}^m x_i^2) - (\sum_{i=1}^m x_i)^2} \quad (3.12)$$

Berdasarkan data eksperimen yang ditampilkan pada tabel diawal catatan ini, maka didapat:

$$a_0 = \frac{385(81) - 55(572,4)}{10(385) - (55)^2} = -0,360$$

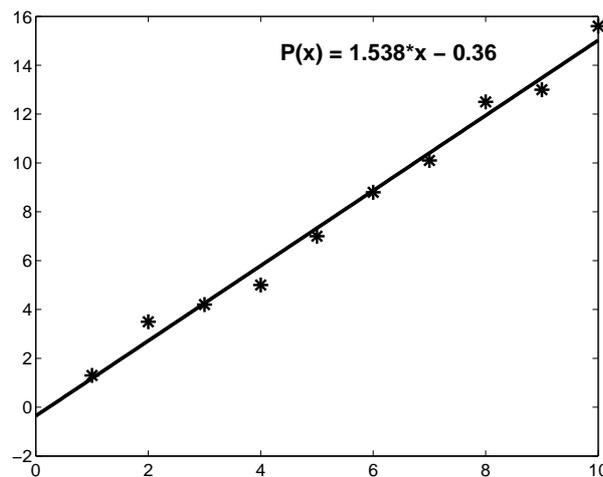
dan

$$a_1 = \frac{10(572,4) - 55(81)}{10(385) - (55)^2} = 1,538$$

Jadi, fungsi pendekatan-nya, $P(x_i)$, adalah

$$P(x_i) = 1,538x_i - 0,360$$

Nilai a_0 dan a_1 disebut **koefisien regresi**. Lebih jauh lagi a_0 disebut *intercept* (titik perpotongan) terhadap sumbu y sedangkan a_1 adalah *gradient* atau *slope* (kemiringan garis). Gambar di bawah ini menampilkan solusi regresi linear tersebut berikut semua titik datanya



Gambar 3.2: Contoh solusi regresi linear

Teknik diatas diterapkan secara rutin dalam analisis data geofisika, khususnya ketika kita mencoba meng-esktrak satu atau dua parameter model dari data observasi. Teknik ini disebut analisis regresi linear (*linear regression analysis*) atau *classical least squares fitting*. Teknik ini pertama kali dipakai oleh Gauss pada tahun 1809. Teknik ini pada mulanya digunakan untuk mencari solusi dari masalah overdetermined namun pada perkembangannya teknik ini diterapkan juga pada underdetermined problem setelah dimodifikasi. Ketika kita ingin mendapatkan lebih dari 2 parameter maka teknik ini disebut analisis regresi multipel (*multiple regression analysis*).

3.3 Aplikasi *least square* pada interpretasi seismik refraksi

Misal $(x_1, t_1), (x_2, t_2), \dots, (x_n, t_n)$ merupakan data observasi yang dilakukan sebanyak n kali pada n geophone dengan jarak x_i , dan anggag persamaan muka gelombang seismik adalah

$$t = \frac{x}{v} + T_h$$

Lalu dilinearisasi menjadi

$$t = a_0 + a_1x \quad a_0 = T_h \quad a_1 = \frac{1}{v}$$

Kesalahan (*error*) diasumsikan hanya berasal dari cuplikan waktu gelombang datang. Penerapan metode regresi linear yang berusaha meminimalkan jumlah kuadrat dari residual, $e_i =$

$t_i - (a_0 + a_1x_i)$, dapat dinyatakan sesuai persamaan (3.11) dan (3.12)

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^m x_i^2 \sum_{i=1}^m t_i - \sum_{i=1}^m x_i t_i \sum_{i=1}^m x_i}{m \left(\sum_{i=1}^m x_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^m x_i \right)^2}$$

dan

$$a_1 = \frac{m \sum_{i=1}^m x_i t_i - \sum_{i=1}^m x_i \sum_{i=1}^m t_i}{m \left(\sum_{i=1}^m x_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^m x_i \right)^2}$$

dengan *standard error* $\chi_{a_1}^2$ dan $\chi_{a_0}^2$ ditentukan oleh rumus berikut

$$\chi_{a_1}^2 = m \frac{\chi^2}{D} \quad (3.13)$$

$$\chi_{a_0}^2 = \chi^2 \frac{\sum x^2}{D} \quad (3.14)$$

dimana

$$D = m \left(\sum_{i=1}^m x_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^m x_i \right)^2$$

$$\chi^2 = \frac{1}{m-2} \sum_{i=1}^m E_i^2$$

Sebagai catatan tambahan, χ^2 adalah nilai deviasi *rms* (*root mean square*) dari data t_i terhadap garis regresi hasil analisis ($a_0 + a_1x_i$) dengan faktor $(n-2)$ karena dalam masalah ini hanya dicari 2 parameter model (a_0 dan a_1).

3.4 Inversi *least squares* linear: pendekatan matriks

Metode *least squares* dapat didekati dengan operasi matriks. Kita tahu bahwa suatu problem geofisika selalu diupayakan agar dapat disederhanakan menjadi $d = Gm$. Kita ingin mendapatkan nilai m . Dan $d = Gm$ dapat dinyatakan dalam bentuk operasi matriks. Jika data yang kita miliki sangat ideal dalam arti tidak ada error sama sekali, maka m bisa diperoleh sebagai berikut

$$m = G^{-1}d$$

Akan tetapi, pada kenyataannya semua data pengukuran pasti memiliki error yang besarnya relatif. Karenanya, data observasi tak akan pernah *fit* secara sempurna dengan model,

$$d = Gm + e_i$$

dan selanjutnya satu-satunya cara untuk memperoleh solusi yang unik adalah dengan meminimalkan jumlah kuadrat dari residual, e_i . Cara ini akan meminimalkan perbedaan antara data lapangan dan model yang diprediksi melalui pemodelan forward. Dalam formulasi matematika dinyatakan dengan

$$q = e^T e = (d - Gm)^T (d - Gm) \quad (3.15)$$

agar minimal maka q diturunkan terhadap m , sehingga

$$\frac{\partial q}{\partial m_j} = \frac{\partial [d^T d - d^T G m - m^T G^T d + m^T G^T G m]}{\partial m_j} = 0 \quad (3.16)$$

atau

$$-d^T G - G^T d + G^T G m + m^T G^T G = 0$$

akhirnya diperoleh

$$2G^T G m = 2G^T d \quad (3.17)$$

Persamaan (3.17) disebut **persamaan normal**. Dengan persamaan normal, estimasi parameter yang dinyatakan dengan \hat{m} ditentukan oleh

$$\hat{m} = [G^T G]^{-1} G^T d \quad (3.18)$$

Persamaan (3.18) disebut **unconstrained least squares** terhadap masalah inversi $d = Gm$. Bagian $[G^T G]^{-1} G^T$ dinamakan **Generalized Inverse** yang mengolah data d untuk memperoleh parameter model m . Untuk menyelesaikan persamaan (3.18) dengan operasi matriks secara numerik atau komputasi bisa menggunakan beberapa metode, diantaranya metode Eliminasi Gauss, LU-Decomposition, Iterasi Gauss-Seidel, dan Singular Value Decomposition.

3.5 Soal

Diketahui data temperatur borehole sebagai berikut. Tentukan slope dan intercept pada z-axis dan kemudian perkirakan temperatur pada kedalaman 390m.

Depth, z(m)	Temp, t(°C)
30	25,0
70	26,2
180	29,7
250	34,3
300	35,5

Constrained Linear Least Squares Inversion

Pada kebanyakan masalah geofisika, sangat mungkin untuk mendapatkan solusi yang berbeda-beda yang semuanya bisa saja dipakai untuk menjelaskan data eksperimen. Namun pada akhirnya, kita harus memilih satu buah solusi yang terbaik. Untuk melakukan hal ini kita harus menambahkan sejumlah informasi yang sebelumnya tidak ada pada persamaan least squares $d = Gm$. Informasi tambahan ini disebut **a priori informasi**, yang selanjutnya akan digunakan untuk meng-*constrain* solusi sehingga diperoleh solusi yang dianggap paling tepat untuk mencitrakan kondisi bawah permukaan. A priori informasi atau yang saya indonesiakan menjadi *informasi awal* ini didapat dari data geofisika yang lainnya, atau bisa juga dari data borehole, atau juga bersumber dari data geologi.

4.1 Inversi dengan informasi awal

Kita dapat menambahkan informasi awal kepada parameter model dalam suatu proses inversi. Secara umum, informasi awal tersebut diharapkan membantu pemodelan inversi sehingga diperoleh hasil yang unik dari sejumlah kemungkinan solusi. Sekali lagi, proses ini disebut meng-*constrain*. Constrain terhadap suatu data dirumuskan sebagai berikut

$$Dm = h \quad (4.1)$$

Dimana D adalah matrik -dengan seluruh elemen selain diagonal bernilai nol- yang beroperasi pada parameter model m sedemikian rupa sehingga hasilnya sama dengan informasi awal h . Menghitung persamaan (4.1) berarti kita telah melakukan apa yang disebut dengan linear equality constraints. Formulasi matematikannya adalah sebagai berikut

$$\phi = (d - Gm)^T(d - Gm) + \beta^2(Dm - h)^T(Dm - h) \quad (4.2)$$

Untuk mendapatkan error minimum maka turunan ϕ terhadap paramter model m adalah

$$2G^T Gm - 2G^T d + 2\beta^2 D^T Dm - 2\beta^2 D^T h = 0$$

diperoleh persamaan normal

$$(G^T G + \beta^2 D^T D)m = G^T d + \beta^2 D^T h$$

Ketika D adalah matri identitas, maka

$$(G^T G + \beta^2 I)m = (G^T d + \beta^2 h)$$

Dari sini solusi constrain didapat sebagai berikut

$$\hat{m}_c = (G^T G + \beta^2 I)^{-1}(G^T d + \beta^2 h) \quad (4.3)$$

Formula ini dinamakan inversi linear terkonstrain atau disebut juga **the biased linear estimation technique**. Keuntungannya adalah formula ini dapat membantu menghasilkan satu solusi yang unik dari sejumlah solusi yang mungkin pada masalah overdetermined dimana didalamnya terdapat ketidakpastian sebagai akibat dari kesalahan pengukuran (*observational errors*).

Parameter β ditentukan secara *trial and error*, namun biasanya bernilai lebih kecil atau sama dengan 1 (satu). β disebut faktor pengali *undetermined* atau disebut juga faktor pengali **Lagrange**. Sehingga metode ini disebut *Lagrange multiplier method* (metode pengali Lagrange).

4.1.1 Memformulasikan persamaan terkonstrain

Persamaan $Dm = h$ secara umum memiliki bentuk

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_p \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Namun demikian, persamaan matrik di atas dapat dimodifikasi sesuai kebutuhan. Misalnya jika informasi awal yang diketahui hanya ada satu, modifikasinya menjadi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{known} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Jika pada kasus lain, kita punya informasi awal yaitu parameter pertama dan parameter ke empat, maka persamaan matrik terkonstrain menjadi

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ 0 \\ 0 \\ h_4 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

4.1.2 Contoh aplikasi inversi terkonstrain

Contoh 1: Least squares garis terkonstrain

Sekarang kita ingin menerapkan inversi terkonstrain pada pengolahan data *first arrivals* dari seismik refraksi. Persamaan least square garis adalah

$$d_i = m_1 + m_2 x_i \quad (4.7)$$

atau dalam bentuk kolektif

$$d = Gm \quad (4.8)$$

dengan m sebagai parameter model yang terdiri atas m_1 dan m_2 . Sementara data lapangan merupakan pasangan dari jarak offset x_i dan waktu datang gelombang (*first arrival time*) t_i .

Sekarang kita berasumsi memiliki informasi dari kegiatan explorasi sebelumnya bahwa garis least square harus melewati titik koordinat (x_c, t_c) . Jadi kita harus meng-konstrain solusi least square untuk mengakomodasi informasi awal tersebut. Dalam hal ini, kita hanya punya sebuah konstrain (Anda bisa saja menambahkan jumlah konstrain-nya bila ada sejumlah informasi awal yang hendak disertakan pada pengolahan least square). Persamaan konstrain adalah $Dm = h$, dimana dalam bentuk matrik dinyatakan

$$\begin{bmatrix} 1 & x_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_c \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Persamaan matrik di atas harus diintegrasikan dengan $d = Gm$ sehingga solusi akhir merupakan solusi terkonstrain yang kita harapkan lebih akurat dibandingkan jika tidak terkonstrain. Tentu anda masih ingat pada least square tidak terkonstrain, dimana dikenal dua komponen berikut $G^T G$ dan $G^T d$. Agar menjadi terkonstrain kedua komponen itu mesti dimodifikasi menjadi

$$(G^T G + \beta^2 I) = \begin{bmatrix} n & \sum x_i & 1 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & x_c \\ 1 & x_c & 0 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

dan

$$(G^T d + \beta^2 h) = \begin{bmatrix} \sum t_i \\ \sum x_i t_i \\ t_c \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Tabel 4.1: Data seismik refraksi: waktu-datang gelombang (t_i) pada empat posisi geophone (x_i)

Trace	$x_i(m)$	$t_i(ms)$
1	2	5,1
2	4	9,2
3	6	11,9
4	8	14,9

dimana nilai β mesti kita tentukan. Akhirnya, solusi terkonstrin terhadap inversi garis yang melewati (x_c, t_c) adalah

$$\hat{m}_c = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum x_i & 1 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & x_c \\ 1 & x_c & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum t_i \\ \sum x_i t_i \\ t_c \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Sekarang, kita melangkah pada kasus nyata. Tabel 4.1 menunjukkan data pengukuran seismik refraksi. Tentukan parameter model untuk persamaan garis yang melewati titik ($x_c = 8, y_c = 14,9$)! Langkah pertama kita hitung komponen matrik

$$(G^T G + \beta^2 I) = \begin{bmatrix} n & \sum x_i & 1 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & x_c \\ 1 & x_c & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 20 & 1 \\ 20 & 120 & 8 \\ 1 & 8 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Kemudian kita hitung komponen matrik yang lain

$$(G^T d + \beta^2 h) = \begin{bmatrix} \sum t_i \\ \sum x_i t_i \\ t_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41,1 \\ 237,6 \\ 14,9 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Problem ini dapat diselesaikan secara numerik dengan metode Eliminasi Gauss. Solusi yang diperoleh adalah $m_1 = 2,3857$, $m_2 = 1,5643$ dan $\beta = 0,2714$. Berikut ini adalah script lengkapnya dalam Matlab

```
clear all
clc;
a(1,1)=4;
a(1,2)=20;
a(1,3)=1;
a(1,4)=41.1;
a(2,1)=20;
a(2,2)=120;
a(2,3)=8;
a(2,4)=237.6;
a(3,1)=1;
```

```

a(3,2)=8;
a(3,3)=0;
a(3,4)=14.9;
a
n=3; % n = jumlah baris
% berikut ini proses triangularisasi -----
for j=1:(n-1)
    kk=j+1;
    for k=kk:n
        m(k,j)=a(k,j)/a(j,j)
        for i=1:(n+1)
            a(k,i)=a(k,i)-m(k,j)*a(j,i);
        end
    end
end
% akhir dari proses triangularisasi -----
a
x(n,1)=a(n,n+1)/a(n,n);
% berikut ini proses substitusi mundur -----
for k=1:n-1
    i=n-1-k+1;
    j=i+1;
    sum=0;
    for k=j:n
        sum = sum + a(i,k) * x(k,1);
    end
    x(i,1)=(a(i,n+1)-sum)/a(i,i);
end
% akhir dari proses substitusi mundur -----
x

```

4.2 Inversi dengan Smoothness

Cara yang paling efektif untuk menginversi data yang terbatas adalah dengan menentukan konstrain sehingga solusi yang diinginkan menjadi *smooth* (halus). Tingkatan *smooth* dapat diukur berdasarkan kondisi fisis atau kondisi geologi.

4.2.1 Formulasi masalah

Mari kita pelajari bagaimana suatu masalah dapat diformulasikan menuju solusi yang *smooth*. Jika diinginkan parameter model bervariasi dengan jarak selisih yang kecil, maka lakukanlah proses minimalisasi perbedaan parameter yang berdekatan $(m_1 - m_2)$, $(m_2 - m_3)$, ..., $(m_{p-1} - m_p)$.

Perbedaan ini dinyatakan sebagai persamaan konstrain $Dm = h$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ & 1 & -1 & \\ & & & \ddots \\ & & & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

dimana D adalah operator selisih yang bertindak sebagai **matrik smoothness** dan Dm disebut penghalus (flatness) solusi vektor parameter model m .

Jika parameter model tidak bervariasi secara smooth terhadap posisi, maka gunakanlah persamaan konstrain berbentuk

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Dalam kasus ini, D adalah matrik identitas dengan dimensi $p \times p$ dan dimensi h adalah $p \times 1$. Operasi ini akan mendorong proses inversi menuju kondisi stabil. Untuk mendapatkan solusi yang smooth, kita gunakan ukuran selisih seperti persamaan (4.2), dinyatakan sebagai

$$q_2(m) = (Dm - h)^T (Dm - h) = m^T D^T D m = m^T H m \quad (4.17)$$

dimana $H = D^T D$.

Kita nyatakan mengenai masalah terkonstrain adalah: Dimulai dari data lapangan yang tidak komplit, tidak lengkap, tidak cukup, kita mencari seluruh kemungkinan solusi dengan residual $q_1 = |d - Gm|^2$ dan solusi yang paling smoothness dengan judgement dari ukuran $q_2(m)$.

Secara matematik, pernyataan di atas memiliki maksud: meminimalkan $q_2 = m^T H m$ dibawah kondisi $|d - Gm|^2 = q_1$ atau secara umum $|d - Gm|^2 \leq q_T$, dimana q_T adalah nilai toleransi maksimum dari residual atau *misfit*.

Masalah konstrain membutuhkan minimalisasi $\|d - Gm\|^2$ dan $q_2(m)$ secara bersamaan,

$$\phi = (d - Gm)^T (d - Gm) + \beta^2 (m^T D^T D m) \quad (4.18)$$

4.2.2 Solusi masalah

Untuk mendapatkan solusi parameter model, perlu dilakukan minimalisasi terhadap persamaan (4.18),

$$\frac{\partial (d^T d - m^T G^T d - d^T G m + m^T G^T G m + \beta^2 m^T H m)}{\partial m_j} = 0$$

sehingga

$$(G^T G + \beta^2 H) m = G^T d$$

Ini adalah persamaan normal yang baru. Dan akhirnya solusi *smoothness* diturunkan sebagai berikut

$$m_s = (G^T G + \beta^2 H)^{-1} G^T d \quad (4.19)$$

Dan bila $D = I$,

$$m_s = (G^T G + \beta^2 I)^{-1} G^T d \quad (4.20)$$

Persamaan (4.20) lebih populer disebut *Damped Least Squares solution* atau solusi Least Square Tereadam. Nama lainnya yang juga cukup terkenal adalah inversi **Marquardt**.

Daftar Pustaka

- [1] Meju, A Max., Geophysical Data Analysis: Understanding Inverse Problem Theory and Practice, (1994), Society of Exploration Geophysicists (SEG)

Indeks

akurasi, 3
arus fluida, 3
bahan tambang, 1
bessel, 7
data lapangan, 1
data observasi, 1
densitas, 4
eksplorasi, 3
elektroda, 7
fitting, 1
forward, 1
gelombang elektromagnetik, 3
gelombang seismik, 3
gempa bumi, 3
geologi, 4
hambatan jenis, 4
hidrogeologi, 3
highly non-linear, 7
human error, 4
instrumen, 4
instrumental error, 4
inversi, 1
inversi diskrit, 6
jejari bumi, 5
kernel, 5
komputasi, 5
laboratorium, 3
linearisasi, 6
lithospere, 3
matematika diskrit, 5
model fisik, 4
model konseptual, 4
model matematika, 1, 4
modulus bulk, 4
momen inersia, 5
noise, 3
non-linear, 6
observasi, 23
parameterisasi, 6
permeabilitas, 4
resistivity, 1
sampling rate, 3
Schlumberger, 6
sedimentasi, 3
seismik refraksi, 1
slowness, 6
sumur bor, 3
unknown parameter, 1